

17 czerwca 2020, godz. 16:30-19:55 (w tym 25 minut na przygotowanie i wgranie plików itp.)

Każde rozwiązanie należy napisać na osobnej kartce (zadanie 6 może być całe na jednej, z jasnym oznaczeniem poszczególnych podpunktów). Prosimy pisać wyraźnie, dużymi literami, ciemnym długopisem.

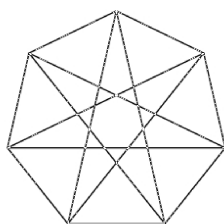
Za każde z sześciu zadań można uzyskać od 0 do 10 punktów (a więc za cały egzamin od 0 do 60).

W zadaniach 1, 2, 3, 5, 6(a) i 6(d) wyniki należy podać w postaci zwartej (bez wielokropka, znaku sumowania itp.) i zawierającej tylko liczby, zmienne, symbole podstawowych działań oraz symbol silni, np. odpowiedź $2019^{2020} + 175 \cdot n! - k^7$ jest OK, natomiast odpowiedzi $1 + 2 + \dots + 2020$ lub $\binom{n}{7}$ nie są.

1. Dla ustalonych liczb $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wyznacz liczbę ciągów (A_1, A_2, \dots, A_k) zbiorów spełniających warunki $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k = [n]$.

2. Wyznacz liczbę sposobów rozdzielenia 33 rozróżnialnych pracowników korporacji do trzech różnych projektów A, B, C tak, aby każdy pracownik był przydzielony do dokładnie jednego z projektów, by do każdego projektu ktoś został przydzielony, a do projektu C — co najmniej dwóch pracowników.

3. Błat stolika ma kształt siedmiokąta foremnego i narysowano na nim przekątne tak jak na poniższym rysunku:



Na ile geometrycznie różnych sposobów można pokolorować otrzymaną figurę dysponując dwoma kolorami (przy czym nie muszą oba zostać użyte), jeśli każdy obszar, na który przekątne podzieliły wielokąt, malujemy jednym kolorem?

4. Podczas przedszkolnej zabawy dzieci stoją naprzeciwko siebie w dwóch rzędach po n osób. Każde dziecko podaje prawą rękę dziecku naprzeciwko lub sąsiadowi z prawej strony lub dziecku stojącemu naprzeciw sąsiada z prawej strony. Analogiczna reguła dotyczy lewej ręki. Nikt nie podaje obu rąk tej samej osobie. Oto przykładowy układ rąk dla dwóch rzędów po 11 dzieci:



Wyznacz liczbę możliwych układów rąk. Należy sformułować i uzasadnić odpowiednie równanie rekurencyjne liniowe jednorodnego drugiego rzędu o stałych współczynnikach oraz wyznaczyć stosowne warunki początkowe. Nie trzeba rozwiązywać tego równania.

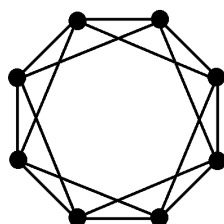
5. Wyznacz liczbę drzew o zbiorze wierzchołków $[n]$ ($n > 1$), do których należy krawędź $\{1, 2\}$.

6. (a) Dla ustalonego $n > 0$ wyznacz liczbę sposobów rozmieszczenia n nierozróżnialnych kul w k rozróżnialnych urnach (przy czym liczba urn $k > 0$ jest dowolna, dla różnych rozmieszczeń może być różna).

(b) Czy istnieje wielościan wypukły, w którym iloczyn liczby wierzchołków, krawędzi i ścian jest równy 3375?

(c) Rozstrzygnij, dla jakich $n, m > 1$ pełny graf dwudzielny $K_{n,m}$ ma cykl Hamiltona.

(d) Wyznacz liczbę chromatyczną grafu o 8 wierzchołkach przedstawionego na rysunku poniżej.



(e) Graf prosty G ma 2019 wierzchołków oraz 2020 krawędzi. Czy w tym grafie muszą istnieć dwa różne wierzchołki, pomiędzy którymi są dwie różne drogi?